Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 12.1 In der $(x, y)-$Ebene wirke ein homogenes Schwerefeld. Die kinetische Energie einer Masse m sei also gegeben durch $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ und die potentielle Energie durch $U = gmy$.
Die Lagrange Funktion lautet

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - gmy$$

und die Euler-Lagrange Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} = 0 = \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) &= m\ddot{y} = -gm = \frac{\partial L}{\partial y}. \end{aligned}$$

Mit $m \neq 0$ erhält man nun die explizite Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

und die Lösungen lauten mit $x_0 = y_0 = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0,x}t + x_0 = v_{0,x}t \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + v_{0,y}t + y_0 = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0,y}t. \end{aligned}$$

Für die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 := \sqrt{v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2}$ und $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$$\begin{aligned} v_{0,x} &= v_0 \cos(\phi) \\ v_{0,y} &= v_0 \sin(\phi) \end{aligned}$$

und mit dieser Substitution erhält man die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\phi)v_0 t \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + \sin(\phi)v_0 t. \end{aligned}$$

Die nicht triviale Nullstelle $t_E = \frac{2v_0 \sin(\phi)}{g}$ von y ist die Flugzeit. Mit dieser erhält man die Flugweite in Abhängigkeit des Winkels ϕ

$$x_E(\phi) := x(t_E) = \frac{v_0^2}{g} 2\sin(\phi)\cos(\phi) = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\phi).$$

Um die maximale Flugweite zu erhalten muss $x_E(\phi)$ maximiert werden. Das Maximum wird bei $\phi = \frac{\pi}{4}$ angenommen.
Der Winkel hängt nicht von der Anfangsgeschwindigkeit ab, da x_E unabhängig der Masse und Anfangsgeschwindigkeit sein Maximum bei $\phi = \frac{\pi}{4}$ annimmt.

Aufgabe 12.2 Leite das Keplersche Gesetz aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz her, wobei für ein ebenes Zweikörperproblem mit Massen m (klein) und M (groß) die Euler-Lagrange Gleichung wie folgt lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right) \\ m\ddot{r} &= m\dot{\phi}^2 r - \frac{\gamma M m}{r^2}. \end{aligned}$$

Nach der Präsenzübung 8.1 und der ersten Gleichung sind die folgenden Ausdrücke Erhaltungsgrößen

$$\begin{aligned} L &:= mr^2\dot{\phi} && \text{(Drehimpuls)} \\ E &:= T + U = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 - \frac{\gamma M m}{r} \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma M m}{r} && \text{(Energie)} \end{aligned}$$

Nun erhält man durch Umstellen den folgenden Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\gamma M m}{r}\right)}.$$

Sei nun $r = r(\phi)$, womit der Fokus weniger auf die Dynamik als vielmehr auf die Geometrie der Bahnkurve gelegt wird. Also gilt mit Hilfe der Beziehung $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} \Leftrightarrow \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$ (Kettenregel) die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{mr^2}{L}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\gamma M m}{r}\right)}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich mit Hilfe von 'Trennung der Variablen' lösen und es gilt mit Anfangswinkel 0

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r} \frac{1}{v^2\sqrt{\left(E - \frac{L^2}{2mv^2} + \frac{\gamma M m}{v}\right)}}dv &= \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}\phi \\ \Leftrightarrow \phi &= \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r} \frac{1}{v^2\sqrt{\left(E - \frac{L^2}{2mv^2} + \frac{\gamma M m}{v}\right)}}dv \\ &= \mp\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{1}{\sqrt{\left(E - \frac{L^2}{2m}u^2 + \gamma M m u\right)}}du \\ &= \mp\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{L^2} - u^2 + \frac{2m^2M\gamma}{L^2}u\right)}}du \\ &= \pm\arccos\left(\frac{1 - \frac{L^2}{m^2M\gamma r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2\gamma^2}}}\right) \mp \arccos\left(\frac{1 - \frac{L^2}{m^2M\gamma r_0}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2\gamma^2}}}\right) \\ &= \pm\arccos\left(\frac{1 - \frac{L^2}{m^2M\gamma r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2\gamma^2}}}\right) + \phi_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{r} &= -\frac{m^2M\gamma}{L^2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2\gamma^2}}\cos(\phi - \phi_0)\right). \end{aligned}$$

Mit $p := \frac{L^2}{m^2 M\gamma}$ und $e := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2\gamma^2}}$ gilt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{-p}(-1 + e\cos(\phi - \phi_0)) \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - e\cos(\phi - \phi_0)}$$

Aufgabe 12.3 Die Euler-Lagrange Differentialgleichungen des Doppelpendels lauten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1}\right) &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2\left(\ddot{\phi}_2\cos(\phi_1 - \phi_2) - \dot{\phi}_2\sin(\phi_1 - \phi_2)(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)\right) \\
&= -m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1 - \phi_2) - (m_1 + m_2)g l_1 \sin(\phi_1) = \frac{\partial L}{\partial \phi_1} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2}\right) &= m_2 l_2^2\ddot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2\left(\ddot{\phi}_1\cos(\phi_1 - \phi_2) - \dot{\phi}_1\sin(\phi_1 - \phi_2)(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)\right) \\
&= m_2 l_1 l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_1 - \phi_2) - m_2 g l_2\sin(\phi_2) = \frac{\partial L}{\partial \phi_2}
\end{aligned}$$